

---

## Corrigé de l'examen du cours MATH-213 du 22 janvier 2024.

### 1 Questions à choix multiples

Pour chaque exercice de cette partie, il n'y a qu'une réponse correcte. Indiquez votre réponse en cochant la case correspondante. On compte +5 points pour une bonne réponse et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut cocher *Ne sait pas*, qui sera compté comme 0 point.

Vous pouvez faire vos calculs sur les feuilles de brouillon (elles ne seront pas corrigées).

---

**Exercice 1.** [5 points.] Calculer la longueur  $\ell$  de la courbe plane

$$\gamma(t) = \left( \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, t - \frac{1}{2}t^2 \right), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Réponse :

- $\ell = 5$
  - $\ell = \frac{5}{2}$
  - $\ell = 3$
  - $\ell = 4$
  - ne sais pas.
- 

**Exercice 2.** [5 points.] Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine du plan et  $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation régulière d'une surface de classe  $C^1$ . Laquelle parmi les matrices suivantes, peut représenter le tenseur métrique de  $S$  en  $u = (u_1, u_2) \in \Omega$  ?

- $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
  - $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
  - $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
  - Ne sais pas.
-

**Exercice 3.** [5 points.] Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine du plan et  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation régulière d'une surface de classe  $C^2$ . On suppose qu'en un point  $u = (u_1, u_2) \in \Omega$ , les dérivées de  $\psi$  sont données par

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = (2, 1, 0), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = (1, 0, 0),$$

et

$$\mathbf{b}_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1^2} = (2, 2, 1), \quad \mathbf{b}_{12} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2} = (0, 1, 2), \quad \mathbf{b}_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2^2} = (-1, 7, 1).$$

Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale correspondant à la co-orientation définie par  $\nu = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}$ .

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ne sais pas.

---

**Exercice 4.** [5 points.] On considère la même surface paramétrée que dans l'exercice précédent. Calculer les courbures principales  $k_1, k_2$  au même point  $u = (u_1, u_2)$ .

$k_1 = 1 - \sqrt{12}$  et  $k_2 = 1 + \sqrt{12}$ .

$k_1 = -1 - \sqrt{12}$  et  $k_2 = -1 + \sqrt{12}$ .

$k_1 = -1$  et  $k_2 = 3$ .

$k_1 = -3$  et  $k_2 = 2$ .

Ne sais pas.

---

**Exercice 5.** [5 points.] Soient  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface de classe  $C^2$  et  $\alpha, \beta : I \rightarrow S$  deux courbes, également de classe  $C^2$ , tracées sur  $S$ . Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  ont un contact d'ordre 1 en  $t_0 \in I$ . Que peut-on dire de leurs courbures normale et géodésique ?

- En  $t_0$ , les deux courbes ont même courbures normale et géodésique.
  - En  $t_0$ , les deux courbes ont la même courbure géodésique mais en général pas la même courbure normale.
  - En  $t_0$ , les deux courbes ont la même courbure normale mais en général pas la même courbure géodésique.
  - Les deux courbes n'ont généralement ni la même courbure normale, ni la même courbure géodésique.
  - Ne sais pas
- 

**Exercice 6.** [5 points.] Que vaut la torsion  $\tau$  de la courbe  $\gamma$  définie par

$$\gamma(t) = (t + \log(t), t - \log(t), 2t - 1) \quad (0 < t < \infty) ?$$

- $\tau = -1$ .
  - $\tau = 0$ .
  - $\tau = \frac{1}{t}$ .
  - $\tau = -\frac{1}{t}$ .
  - Ne sais pas
- 

**Exercice 7.** [5 points.] Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 2$ . Sachant que le centre du cercle osculateur au graphe de  $f$  en  $(0, 0)$  est le point  $c = (-2, 1)$ , quelle est la valeur de la seconde dérivée de  $f$  en 0 ?

- $f''(0) = 5$ .
- $f''(0) = 1$ .
- $f''(0) = -5$ .
- $f''(0) = -1$ .
- Ne sais pas

## 2 Vrai ou Faux ?

Pour chaque question dans cette partie , marquer (sans faire de ratures) la VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse). On compte +2 points par réponse correcte et -1 point pour chaque réponse qui n'est pas correcte.

---

**Question 8.** [2 points.]

Soit  $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière. On suppose que les lignes de coordonnées se coupent orthogonalement au point  $p = \psi(u)$ . Alors la matrice  $\mathbf{G}(u)$  de la première forme fondamentale au point  $u$  est une matrice diagonale.

VRAI                       FAUX                       Ne sais pas

---

**Question 9.** [2 points.] La matrice  $\mathbf{L}(u)$  de l'application de Weingarten d'une surface paramétrée régulière est toujours une matrice symétrique.

VRAI                       FAUX                       Ne sais pas

---

**Question 10.** [2 points.]

Si deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  sont intrinsèquement isométriques, alors elles ont la même courbure moyenne.

VRAI                       FAUX                       Ne sais pas

---

**Question 11.** [2 points.] La courbure orientée d'une courbe plane de classe  $C^2$  n'est définie que dans le cas où cette courbe est birégulière.

VRAI                       FAUX                       Ne sais pas

---

**Question 12.** [2 points.] Si  $\gamma$  est une géodésique d'une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ , alors sa torsion géodésique est égale à sa torsion en tant que courbe de  $\mathbb{R}^3$  (au signe près).

VRAI                       FAUX                       Ne sais pas

### 3 Questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

---

#### Problème 13. [22 points.]

On considère la surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  définie par l'équation  $y = z(x - z)$ .

- (a) Prouver qu'il s'agit d'une surface régulière (i.e. une sous-variété) de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Définir ce qu'est une surface réglée.
- (c) Prouver que  $S$  est une surface réglée.
- (d) Montrer que l'application  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\psi(u, v) = (u + v, uv, v)$  est une paramétrisation régulière globale de  $S$ .
- (e) Calculer le tenseur métrique associé à cette paramétrisation.
- (f) Calculer la deuxième forme fondamentale associée à cette paramétrisation.
- (g) Que vaut la courbure de Gauss de cette surface.

---

#### Solution du problème 13

(a) Par définition, on a  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ , avec  $f(x, y, z) = y - z(x - z)$ . Il est clair que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

On a  $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ , donc le gradient (ou la différentielle) de  $f$  ne s'annule jamais.

Par conséquent  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion (une application de rang constant) et donc  $S = f^{-1}(0)$  est bien une sous-variété de classe  $C^\infty$ .

(c) L'intersection de la surface  $S$  avec le plan  $\{z = c\}$  est la droite d'équation  $y = cx - c^2$ . Ainsi chaque point de  $S$  appartient à une droite qui est contenue dans la surface.

(d) Pour montrer que  $\psi$  est une paramétrisation régulière globale de  $S$ , on montre que

(i)  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  et régulière, i.e. de rang constant = 2.

(ii)  $\psi(u, v) \in S$  pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

(iii)  $\psi$  est une bijection de  $\mathbb{R}^2$  vers  $S$  et son inverse est de classe  $C^\infty$ .

Preuve de (i). Il est clair que  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , par ailleurs la matrice jacobienne

$$D\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est clairement de rang 2 pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  (donc  $\psi$  est une immersion).

(On peut aussi observer que les vecteurs  $\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}$  et  $\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}$  sont partout linéairement indépendants).

Preuve de (ii). Il suffit de vérifier que  $f(\psi(u, v)) = 0$  pour tout  $(u, v)$ . C'est un calcul banal :

$$f(\psi(u, v)) = y - z(x - z) = uv - v(u + v - v) = 0.$$

Preuve de (iii). La restriction de l'application  $\phi : (x, y, z) = (x - z, z)$  à la surface  $S$  est une inverse de  $\psi$ , ce qui montre à la fois l'injectivité et la surjectivité.

De plus  $\phi$  est clairement de classe  $C^\infty$ .

(e) On a  $\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} = (1, v, 0)$  et  $\mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2} = (1, u, 1)$ . On calcule alors facilement  $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$  et on a le tenseur métrique

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 1 + uv \\ 1 + uv & 2 + u^2 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : le tenseur métrique est donné par  $\mathbf{G} = D\psi^\top \cdot D\psi$ .

Observons pour la suite que  $\det(\mathbf{G}) = 1 + v^2 + (u - v)^2$ .

(f) On calcule d'abord la co-orientation (le vecteur normal)

$$\nu = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = \frac{(v, -1, u - v)}{\sqrt{1 + v^2 + (u - v)^2}},$$

Puis on calcule les vecteurs  $\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial u_j}$ , on trouve que

$$\mathbf{b}_{1,1} = \mathbf{b}_{2,2} = 0, \quad \mathbf{b}_{1,2} = (0, 1, 0).$$

Donc les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = h_{21} = \langle \nu, \mathbf{b}_{1,2} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{1 + v^2 + (u - v)^2}}.$$

Sous forme matricielle, la seconde forme fondamentale s'écrit

$$\mathbf{H} = \frac{-1}{\sqrt{1 + v^2 + (u - v)^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(g) La courbure de Gauss est

$$K = \frac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{G})} = \frac{-1}{(1 + v^2 + (u - v)^2)^2}.$$

**Problème 14.** [15 points.]

Une courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow S$  tracée sur une surface régulière coorientée  $S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  s'appelle une *ligne asymptotique*<sup>1</sup> si elle est de classe  $C^2$  et son vecteur de courbure est tangent à la surface pour tout  $t \in I$ .

Prouver que les affirmations suivantes sont équivalentes:

- (a) La courbe  $\gamma$  est une ligne asymptotique de  $S$ .
- (b) La courbure normale  $k_n$  de  $\gamma$  est identiquement nulle.
- (c)  $h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$  pour tout  $t \in I$ , où  $h$  est la seconde forme fondamentale de  $S$ .
- (d) En tout point de la courbe, le vecteur binormal de  $\gamma$  est égale, au signe près, au vecteur de coorientation de la surface.
- (e) Le plan osculateur à  $\gamma$  coïncide avec le plan affine tangent en  $S$  en chaque point de  $\gamma$ .

(Pour les points (d) et (e) on suppose que la courbe est régulière au sens de Frenet).

---

**Solution du problème 14**

Nous allons d'abord démontrer les équivalences (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c). Puis, sous l'hypothèse de régularité au sens de Frenet, les implications (a)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e).

(a)  $\Leftrightarrow$  (b) : La courbure normale de  $\gamma$  est définie par  $k_n(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \nu(t) \rangle$ . Donc  $\mathbf{K}_\gamma(t) \perp \nu(t)$  si et seulement si  $k_n(t) = 0$ .

(b)  $\Leftrightarrow$  (c) : Cette équivalence se déduit de la formule suivante, vue au cours, et qui dit que la courbure normale de  $\gamma$  est donnée par

$$k_n(t) = \frac{h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}.$$

Rappelons la preuve de cette formule : On a  $\langle \nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in I$ , donc

$$\left\langle \frac{d}{dt} \nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle + \langle \nu(\gamma(t)), \ddot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

En utilisant la formule de l'accélération  $\ddot{\gamma}(t) = V^2(t)\mathbf{K}_\gamma(t) + \dot{V}(t)\mathbf{T}_\gamma(t)$ , on voit que

$$\langle \nu(\gamma(t)), \ddot{\gamma}(t) \rangle = V^2(t)\langle \nu(\gamma(t)), \mathbf{K}_\gamma(t) \rangle + \dot{V}(t)\langle \nu(\gamma(t)), \mathbf{T}_\gamma(t) \rangle$$

Le dernier terme est nul, donc

$$\langle \nu(\gamma(t)), \ddot{\gamma}(t) \rangle = V^2(t)\langle \nu(\gamma(t)), \mathbf{K}_\gamma(t) \rangle = \|\dot{\gamma}(t)\|^2 k_n(t).$$

D'autre part

$$\left\langle \frac{d}{dt} \nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = \langle d\nu(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle \mathbf{L}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = -h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Des trois précédentes identités, on déduit que

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 k_n(t) = h(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

---

<sup>1</sup>La terminologie est justifiée par le fait que le vecteur vitesse d'une ligne de courbure est en direction d'une asymptote de l'indicatrice de Dupin, qui est l'ensemble des vecteurs  $v \in T_p S$  tels que  $|h(v, v)| = 1$  (mais ceci n'influence pas l'exercice).

On a donc démontré (a)  $\Leftrightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c) pour toute courbe de classe  $C^2$  sur la surface  $S$ .

On suppose maintenant que la courbe  $\gamma$  est régulière au sens de Frenet, et on note  $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$  le repère de Frenet. Sous cette hypothèse on montre (a)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e).

(a)  $\Rightarrow$  (d) : Par hypothèse  $\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{K}$  est tangent à la surface  $S$ . Par conséquent  $\mathbf{N} = \pm \mu$  où  $\mu = \nu \times \mathbf{T}$  est le troisième vecteur du repère de Darboux. On a donc

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \pm \mathbf{T} \times \mu = \pm \nu.$$

(d)  $\Rightarrow$  (e) Le plan osculateur à  $\gamma$  est en chaque point le plan passant par le point  $p = \gamma(t)$  qui est orthogonal au vecteur  $\mathbf{B} = \pm \nu$ . Ce plan est également le plan tangent à  $S$  en  $p$  (puisque  $\nu$  est par définition orthogonal au plan tangent).

(e)  $\Rightarrow$  (a) Évident car le vecteur de courbure est parallèle au plan osculateur (il est combinaison linéaire des vecteurs  $\dot{\gamma}$  et  $\ddot{\gamma}$ ).

**Problème 15.** [18 points.]

Répondre aux questions suivantes, en donnant des définitions précises et en justifiant soigneusement vos affirmations.

- (a) Définir la notion de *sous-variété différentiable* de dimension  $m$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Définir ce qu'est l'*espace tangent*  $T_p M$  à une sous-variété différentiable  $M \subset \mathbb{R}^n$ .
- (c) Démontrer que  $T_p M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Quel est sa dimension ?
- (d) Démontrer que si  $M$  est une hypersurface définie par une équation régulière  $f = 0$ , i.e.  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ , alors

$$T_p M = \left\{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \right\}.$$

**Solution du problème 15**

(a) Un sous-ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété différentiable de dimension  $m$  si pour chaque point  $p$  de  $M$  il existe un difféomorphisme (de classe  $C^k$  avec  $k \geq 1$ )  $f : U \rightarrow V$ , où  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un voisinage de  $p$  et  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , tel que

$$\Phi(M \cap U) = E \cap V,$$

où  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ .

(b) L'espace tangent à la surface  $M$  au point  $p$  est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ ; on le note  $T_p M$ .

Un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est tangent à la sous-variété  $M$  en  $p$  s'il est le vecteur vitesse d'une courbe  $C^1$  tracée sur  $M$  et qui passe par  $p$ .

Plus précisément,  $\mathbf{v} \in T_p M$  s'il existe une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  (pour un  $\varepsilon > 0$ ) de classe  $C^1$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$  (on dit alors que la courbe  $\gamma$  *représente* le vecteur tangent  $\mathbf{v}$ ).

(c) Soit  $p$  un point de la sous-variété  $M$  et  $\Phi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme comme défini au point (a) ci-dessus. Nous allons montrer que  $T_p M = d\Phi_p^{-1}(E)$ .

Soit  $v \in T_p M$  un vecteur tangent représenté par une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ . Alors  $\Phi(\gamma(t)) \in E$  pour tout  $t$ . Donc  $d\Phi_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \in E$  (car  $E$  est un sous-espace vectoriel). Cela montre que  $d\Phi_p(T_p M) \subset E$ .

Montrons réciproquement que  $d\Phi_p(v) \supset E$ . Notons  $q = \Phi(p) \in V$ , et soit  $w \in E$ . Si  $t$  est assez petit, on a  $q+tw \in V$  (car  $V$  est un ouvert). On peut donc définir la courbe  $\gamma(t) = \Phi^{-1}(q+tw) \in M$ . On a clairement  $d\Phi_p(\dot{\gamma}(0)) = w$  ce qui implique que  $w \in d\Phi_p(v)$ .

On a montré que  $d\Phi_p(T_p M) = E$ , donc  $T_p M = d\Phi_p^{-1}(E)$  qui est un espace vectoriel puisque la différentielle  $d\Phi_p$  est un isomorphisme linéaire.

De plus,  $\dim(T_p M) = \dim(E) = m$ .

(d) Soit  $v \in T_p M$  un vecteur tangent représenté par une courbe  $\gamma$ . Puisque  $\gamma(t) \in M$  pour tout  $t$ , on a  $f(\gamma(t)) = 0$  pour tout  $t$ , par conséquent on a pour tout  $t$

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{dx_i}{dt},$$

ce qui nous dit qu'en  $t = 0$  on a  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i = 0$ . On a montré que

$$T_p M \subset \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i = 0 \right\},$$

mais ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de dimension  $n - 1$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a donc égalité.